87e Année (1976-1977) Septembre 1976 N° 1
Mensuel



REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

Sujets donnés aux concours d'Agrégation et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1976

N.D.L.R. — Pour permettre à ce numéro de la Revue de présenter un éventail des concours aussi large que possible, nous avons dû renoncer à faire paraître le sujet de certaines épreuves. Nos lecteurs voudront bien nous en excuser.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Composition de mathématiques générales.

INTRODUCTION.

6128. On se fixe pour tout le problème un espace vectoriel euclidien E de dimension finie supérieure ou égale à 4. Par « *vecteur* » on entend « élément de E ». Si x et y sont deux vecteurs, on note xy leur produit scalaire (qui est un nombre réel). Si x est un vecteur, on note $|x|$ sa *norme* $\sqrt{xx}$. Si x et y sont deux vecteurs non nuls, on note $\widehat{x,y}$ leur *angle*, c'est-à-dire l'unique nombre réel θ tel que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ et que $\cos\theta = \dfrac{xy}{|x|.|y|}$.

On convient d'appeler *réflexion* une symétrie hyperplane orthogonale de E, c'est-à-dire un élément ρ du groupe orthogonal $O(E)$ de E tel que $\rho^2 = 1_E$ et que l'ensemble $\operatorname{Ker}(\rho - 1_E)$ des points fixes de ρ soit un hyperplan de E. Si x est un vecteur non nul, ρ_x désigne l'unique réflexion telle que $\rho_x(x) = -x$. On appelle *similitude* le composé d'une transformation orthogonale (élément de $O(E)$) et d'une homothétie (centrée en l'origine de E) de rapport différent de zéro. Deux parties A et B de E sont dites *semblables* s'il existe une similitude σ telle que $\sigma(A) = B$.

Un *cristal* est une partie non-vide X de E telle que, pour tout couple (x, y), d'éléments de X (éventuellement égaux), on ait

$$y \neq 0, \quad y \neq 2x, \quad 2\frac{xy}{yy} \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \rho_y(x) \in X.$$

PREMIÈRE PARTIE.

I. — 1° Soit x et y deux vecteurs, avec $y \neq 0$. On pose alors $n(x, y) = 2\dfrac{xy}{yy}$.

Démontrer la formule $\rho_y(x) = x - n(x, y)y$.

I. — 2° Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal, on a les inégalités suivantes :

$$0 \leqslant n(x, y)n(y, x) \leqslant 4 \quad \text{et} \quad -3 \leqslant n(x, y) \leqslant 3.$$

I. — 3° Démontrer l'existence d'une partie Ω de $\mathbf{R}^4$, de cardinal 12, telle que si x et y sont deux vecteurs non orthogonaux appartenant à un même cristal, on ait

$$\left(n(x, y),\quad n(y, x),\quad \frac{|y|}{|x|},\quad \widehat{x, y}\right) \in \Omega.$$

(Par exception, il est nécessaire de traiter complètement cette question, c'est-à-dire de disposer d'un tel ensemble Ω par la liste de ses 12 éléments, pour pouvoir résoudre la suite du problème. En règle générale, il suffit en effet, pour pouvoir répondre à une question, d'admettre les résultats énoncés dans les questions qui la précèdent.)

I. — 4° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle *aigu* si $0 < \widehat{x, y} < \frac{\pi}{2}$.

Démontrer que si deux vecteurs x et y appartiennent à un même cristal X et forment un angle aigu, alors leur différence $y - x$ appartient à X.

I. — 5° Soit X et Y deux cristaux, F un sous-espace vectoriel de E, λ un nombre réel strictement positif, S_λ la « sphère » formée des vecteurs de norme λ. Démontrer que $X \cap Y$, $X \cap F$ et $X \cap S_\lambda$ sont, ou bien vides, ou bien des cristaux.

I. — 6° Soit $X_1, \ldots, X_p$ $(p \geqslant 2)$ une famille finie de cristaux deux à deux *orthogonaux*, c'est-à-dire tels que tout vecteur de X_i soit orthogonal à tout vecteur de X_j, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant p$, $i \neq j$.

Démontrer que la réunion $X = X_1 \cup \ldots \cup X_p$ est un cristal (on dira que X est la *réunion orthogonale* des cristaux $X_1, \ldots, X_p$).

I. — 7° Un cristal Y est dit *indécomposable* s'il n'existe pas de cristaux Y_1 et Y_2 tels que Y soit la réunion orthogonale de Y_1 et de Y_2.

Démontrer que tout cristal non indécomposable X est réunion orthogonale d'une famille finie $X_1, \ldots, X_p$ de cristaux indécomposables, et que ces cristaux $X_1, \ldots, X_p$ sont parfaitement déterminés par X, à l'ordre près.

I. — 8° Si P est un ensemble formé de vecteurs non nuls, on note W(P) le sous-groupe du groupe orthogonal O(E) engendré par les réflexions ρ_x, lorsque x décrit P.

Démontrer que si un vecteur x appartient à un cristal indécomposable X, alors, d'une part l'orbite de x sous l'action de W(X) et d'autre part l'ensemble X engendrent le même sous-espace vectoriel de E.

I. — 9° Si P est une partie de E, on note |P| l'ensemble des normes $|x|$ lorsque x décrit P.
Démontrer que si X est un cristal indécomposable, l'ensemble |X| possède 1 ou 2 éléments.

I. — 10° Soit X un cristal indécomposable, et soit λ le plus petit élément de |X|. Démontrer que si x et y sont deux vecteurs distincts de X, on a $|x - y| \geqslant \lambda$.

I. — 11° Démontrer que tout cristal est fini.

I. — 12° Démontrer que si X est un cristal, le groupe W(X) est fini.

I. — 13° On appelle *rang* d'un cristal X la dimension du sous-espace vectoriel **R**X engendré par X.
Démontrer qu'à similitude près il n'existe qu'un seul cristal de rang 1, noté A_1, et qu'il est indécomposable.

Deuxième partie.

(*Les résultats de cette deuxième partie ne sont pas indispensables par la suite.*)

II. — 1° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté S_2, qui ne soit pas indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner S_2 (dans le plan euclidien $\mathbf{R}S_2$).

II. — 2° Démontrer que dans un cristal X indécomposable de rang 2, on peut trouver deux vecteurs x et y formant un angle aigu. Si de plus |X| possède deux éléments, démontrer que l'on peut imposer la condition supplémentaire $|y| > |x|$.

II. — 3° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un seul cristal de rang 2, noté A_2, qui soit indécomposable et dont tous les vecteurs aient même norme. Dessiner A_2.

II. — 4° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe, outre le cristal A_2, que deux autres cristaux indécomposables de rang 2, notés B_2 et G_2, de cardinaux respectifs 8 et 12.
Dessiner des deux cristaux.

Troisième partie.

III. — 1° Démontrer la non-vacuité de l'ensemble $\mathscr{C}(X)$ des vecteurs t qui ne sont orthogonaux à aucun des vecteurs d'un cristal donné X.

III. — 2° Soit X un cristal et $t \in \mathscr{C}(X)$. Notons X_t^+ l'ensemble des vecteurs de X qui forment un angle aigu ou nul avec t. Notons enfin B_t^X l'ensemble des vecteurs de X_t^+ qui ne peuvent pas s'écrire comme somme de deux éléments de X_t^+. Démontrer que tout élément de X_t^+ est combinaison linéaire d'éléments de B_t^X à coefficients entiers positifs ou nuls.

III. — 3° On dit que deux vecteurs non nuls x et y forment un angle *obtus* si $\frac{\pi}{2} < \widehat{x, y} < \pi$. Soit X un cristal et $t \in \mathscr{C}(X)$; démontrer que les éléments de B_t^X forment entre eux des angles obtus ou droits.

III. — 4° On appelle *demi-espace* (sous-entendu : strict) l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ par une forme linéaire non nulle $E \rightarrow \mathbf{R}$.

Démontrer que si des vecteurs sont situés dans un même demi-espace et forment entre eux, deux à deux, des angles droits ou obtus, alors ils forment une famille libre.

III. — 5° Une partie $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ d'un cristal X est dite une *base cristalline* de X si c'est une famille libre, et si pour tout x dans X, il existe un élément $(\varepsilon, \nu_1, \ldots, \nu_r)$ dans le produit cartésien

$$\{-1, +1\} \times \mathbf{N}^r \quad \text{tel que} \quad x = \varepsilon(\nu_1 b_1 + \cdots + \nu_r b_r).$$

Cette définition étant posée, soit X un cristal et $t \in \mathscr{C}(X)$; démontrer que B_t^X est une base cristalline de X.

III. — 6° Soit B une base cristalline d'un cristal X.

Démontrer qu'il existe un vecteur $t \in \mathscr{C}(X)$ tel que $tb = 1$, pour tout $b \in B$, et que, pour un tel vecteur t, on a $B = B_t^X$.

III. — 7° Soit B une base cristalline d'un cristal X. On note alors $X^+(B)$ l'ensemble des vecteurs *positifs* de X relativement à B, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $x \in X$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients positifs ou nuls des éléments de B.

Démontrer que si $b \in B$, la réflexion ρ_b laisse globalement invariant l'ensemble $X^+(B)$ privé de b.

III. — 8° Soit B une base cristalline d'un cristal X. Notons s_B^X la demi-somme des vecteurs de X qui sont positifs relativement à B.

Démontrer que pour tout b dans B, on a $\rho_p(s_B^X) = s_B^X - b$.

III. — 9° Soit x un vecteur d'un cristal X de rang supérieur ou égal à 2. Démontrer qu'il existe un vecteur u orthogonal à x, et donc à $-x$, mais non orthogonal aux autres vecteurs de X.

III. — 10° Soit x, X et u comme à la question précédente, et soit v un vecteur tel que $vx > 0$. Posons

$$\varepsilon = \min_{y \in X,\, y \neq \pm x} |uy|, \qquad M = \max_{y \in X} vy, \qquad t = u + \frac{\varepsilon}{2M} v.$$

Démontrer que $t \in \mathscr{C}(X)$ et que $x \in B_t^X$.

III. — 11° Soit B une base cristalline d'un cristal X, et soit $t \in \mathscr{C}(X)$. Soit $\varphi \in W(B)$ tel que le produit scalaire $s_B^X \varphi(t)$ soit maximal (lorsque φ décrit le groupe $W(B)$).

Démontrer que $\varphi(t)$ forme un angle aigu ou nul avec tous les vecteurs de B.

III. — 12° Soit A et B deux bases cristallines d'un même cristal. Démontrer qu'il existe φ dans $W(B)$ tel que $\varphi(A) = B$.

III. — 13° Soit B une base cristalline d'un cristal X. Démontrer que $W(B) = W(X)$.

III. — 14° Démontrer que si deux cristaux ont une base cristalline en commun, alors ils sont égaux.

III. — 15° Démontrer qu'à similitude près, il n'existe qu'un nombre fini de cristaux indécomposables.

QUATRIÈME PARTIE.

Dans cette partie on se fixe une base orthonormale $e_1, \ldots, e_N$ $(N \geqslant 4)$ de l'espace euclidien E.

IV. — 1° Soit r un entier tel que $1 \leqslant r \leqslant N - 1$ et soit A_r l'ensemble des $r(r+1)$ vecteurs de la forme $e_i - e_j$, avec $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant r + 1$, $1 \leqslant j \leqslant r + 1$. Démontrer que A_r est un cristal.

IV. — 2° Démontrer que les r vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_r - e_{r+1}$ constituent une base cristalline de A_r.

IV. — 3° Trouver le nombre d'éléments du groupe $W(A_r)$.

IV. — 4° Soit r un entier tel que $2 \leqslant r \leqslant N$. On considère, d'une part, les $2r$ vecteurs $\pm e_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ et, d'autre part, les $2r(r-1)$ vecteurs $\pm e_i \pm e_j (1 \leqslant i < j \leqslant r)$, où les signes $\pm$ sont choisis indépendamment. Soit B_r l'ensemble de ces $2r^2$ vecteurs. Démontrer que B_r est un cristal.

IV. — 5° Démontrer que les r vecteurs $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{r-1} - e_r, e_r$ constituent une base cristalline de B_r.

IV. — 6° Soit $\mathscr{I}$ l'*inversion* de centre l'origine de E et de puissance 2, c'est-à-dire l'application qui à tout vecteur non nul x associe l'unique vecteur y colinéaire à x tel que $xy = 2$. Démontrer que si X est un cristal, alors $\mathscr{I}(X)$ est un cristal.

IV. — 7° Démontrer que si B est une base cristalline du cristal X, alors $\mathscr{I}(B)$ est une base cristalline du cristal *inverse* $\mathscr{I}(X)$.

IV. — 8° Démontrer que les cristaux A_r, B_r et $C_r = \mathscr{I}(B_r)$ sont tous indécomposables.

IV. — 9° Démontrer que, pour $1 \leqslant r \leqslant N-1$, on a l'égalité $\mathscr{I}(A_r) = A_r$, et que les deux cristaux B_2 et C_2 sont semblables.

IV. — 10° Démontrer que les cristaux $A_r (1 \leqslant r \leqslant N-1)$, $B_r (2 \leqslant r \leqslant N)$, $C_r (3 \leqslant r \leqslant N)$ sont deux à deux non semblables.

IV. — 11° Trouver deux cristaux indécomposables non semblables X et Y tels que $W(X) = W(Y)$.

Cinquième partie.

(*Les questions* 2°, 3°, 4° *et* 5° *de cette cinquième partie sont indépendantes des deuxième, troisième et quatrième parties.*)

V. — 1° Un groupe G est dit *cristallographique* si c'est un sous-groupe fini du groupe orthogonal O(E), s'il n'est pas réduit à son élément neutre, si en outre il est engendré par des réflexions, et si enfin il existe une *base de rationnalité* pour G, c'est-à-dire une base de E (non nécessairement orthogonale) telle que les matrices des éléments de G par rapport à cette base soient toutes à coefficients rationnels.

Démontrer que si X est un cristal, le groupe W(X) est cristallographique.

V. — 2° Soit A une base de rationnalité pour un groupe cristallographique G. Soit T le sous-groupe du groupe additif de E engendré par la réunion $D = \bigcup_{\varphi \in G} \varphi(A)$.

Démontrer qu'il existe un nombre réel ε strictement positif tel que le seul vecteur de T de norme strictement inférieure à ε soit le vecteur nul. (On conserve ces notations dans les questions 3°, 4° et 5° ci-dessous.)

V. — 3° Démontrer que si y est un vecteur non nul tel que la réflexion ρ_y appartienne à G, alors le groupe $T \cap \mathbf{R}y$ (formé des vecteurs de T colinéaires à y) est cyclique.

V. — 4° Soit X l'ensemble des vecteurs non nuls x tels que $\rho_x \in G$ et que x soit un générateur du groupe cyclique $T \cap \mathbf{R}x$. Démontrer que X est un cristal.

V. — 5° Démontrer que $G = W(X)$.

V. — 6° Soit ρ et σ deux réflexions appartenant à un même groupe cristallographique. Démontrer que $(\rho \circ \sigma)^{12} = 1_E$.

V. — 7° Soit φ un élément d'un groupe cristallographique. Considérant φ comme un endomorphisme de l'espace vectoriel E, démontrer que son polynôme caractéristique est à coefficients entiers.

V. — 8° Donner un exemple de sous-groupe fini de O(E), non réduit à l'élément neutre, engendré par des réflexions, mais qui ne soit pas cristallographique.

V. — 9° Démontrer qu'à isomorphie près, il n'y a qu'un nombre fini de groupes cristallographiques.

Sixième partie.

(*Sauf pour sa dernière question, cette partie est indépendante de la cinquième partie.*)

VI. — 1° Soit B une base cristalline d'un cristal indécomposable X (les notations des questions 1°, 2° et 3° se suivent).

Démontrer que si x et y sont dans B, le nombre $\cos \widehat{x, y}$ ne peut prendre que quatre valeurs.

VI. — 2° Désormais, X est de rang 3.

Démontrer que $B = \{a, b, c\}$, avec a non orthogonal à b et b non orthogonal à c.

VI. — 3° Posons $\alpha = \frac{a}{|a|}$, $\beta = \frac{b}{|b|}$ et $\gamma = \frac{c}{|c|}$. En exprimant que le carré scalaire de chacun des trois vecteurs $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma$ et $\sqrt{3}\alpha + 2\beta + \gamma$ est strictement positif, démontrer que le triplet $(\cos \widehat{\alpha, \beta}, \cos \widehat{\beta, \gamma}, \cos \widehat{\gamma, \alpha})$ ne peut prendre que trois valeurs.

VI. — 4° Démontrer que les trois cristaux A_3, B_3 et C_3 sont, à similitude près, les seuls cristaux indécomposables de rang 3.

VI. — 5° Soit ρ, σ et τ trois réflexions appartenant à un même groupe cristallographique. Démontrer que $(\rho \circ \sigma \circ \tau)^{48} = 1_E$.

Composition d'analyse.

PRÉLIMINAIRES.

1° **K** désigne **R** ou **C**. Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$, et n un entier positif $(n \in \mathbf{N})$, on note $\mathscr{C}^n(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble des applications de classe C^n (*en tant que fonctions de deux variables réelles*) de Ω dans **K**. En particulier $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{K})$ est l'ensemble des applications continues de Ω dans **K**.

On note $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathscr{C}^n(\Omega, \mathbf{K})$.

Lorsque la première (resp. seconde) variable est notée x (resp. y), $\frac{\partial}{\partial x}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial y}\right)$ désigne l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la première (resp. seconde) variable, et Δ désigne alors l'opérateur

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et k un entier positif, on note $\mathscr{H}^k(\Omega, \mathbf{K})$ l'ensemble des éléments f de $\mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbf{K})$ tels que $\Delta^k f = 0$. On a ainsi $\mathscr{H}^0(\Omega, \mathbf{K}) = \{0\}$. Un élément f de $\mathscr{H}^k(\Omega, \mathbf{K})$ (plus spécialement de $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{K})$) est dit « polyharmonique » [d'ordre k, de Ω dans **K**] (plus spécialement « harmonique » [de Ω dans **K**]). On admet *sans démonstration* que $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{K})$ est fermé dans l'espace $\mathscr{C}^0(\Omega, \mathbf{K})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω.

2° On identifiera parfois $\mathbf{R}^2$ et **C** en utilisant la variable complexe $x + iy$. Si celle-ci est notée $z[x = \mathrm{Re}(z) ; y = \mathrm{Im}(z)]$, on désigne par $\frac{\partial}{\partial z}$ $\left(\text{resp. } \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$ l'opérateur de dérivation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\text{resp. } \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right).$$

On rappelle alors les formules :

$$a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} = c\frac{\partial}{\partial z} + \bar{c}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad \text{si} \quad c = a + ib; \qquad \frac{\partial}{\partial z} \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta; \qquad df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

et le résultat suivant :

Si f est une fonction holomorphe d'un ouvert non vide Ω de **C** dans **C**, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ et $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$, pour tout z dans Ω.

3° Si a est un complexe, ρ un réel strictement positif, $D(a, \rho)$ (resp. $\overline{D}(a, \rho)$) désigne le disque ouvert (resp. fermé) de **C** de centre a, de rayon ρ. Pour Ω *disque* ouvert non vide de **C**, on admet *sans démonstration* que les éléments de $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{R})$ (resp. $\mathscr{H}^1(\Omega, \mathbf{C})$ sont exactement les parties réelles des fonctions holomorphes de Ω dans **C** (resp. les fonctions $f + \bar{g}$, où f, g sont des fonctions holomorphes de Ω dans **C**).

4° On désigne par λ la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$ (ou **C**). Les locutions « λ-intégrable », « λ-mesurable », « λ-presque partout », etc., sont usuelles. On désigne par $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, définies λ-presque partout dans **C**, et λ-intégrables. Si f appartient à $\mathscr{L}$, son intégrale est notée indifféremment

$$\int f(z)\, d\lambda(z), \qquad \int f(\zeta)\, d\lambda(\zeta), \qquad \iint f(x, y)\, dx\, dy, \quad \text{etc.}$$

Si K est un compact de **C**, $\mathscr{L}_K$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{L}$ qui sont nuls λ-presque partout dans $\mathbf{C} \setminus K$. On note plus spécialement, R étant un réel strictement positif, $\mathscr{L}_R$ pour $\mathscr{L}_{\overline{D}(0, R)}$. Enfin $\mathscr{L}_C$ désigne $\bigcap_{R > 0} \mathscr{L}_R$.